Dossier n°2 : Exemples d'emploi de dénombrements pour le calcul de probabilités sur un ensemble fini d'épreuves.

Rédigé par Cécile COURTOIS, le 24 août 2003.
cecile-courtois@wanadoo.fr

I Situation par rapport aux programmes.

Les probabilités sont introduites en classe de Première S et ES avec la définition d'une loi de probabilité sur un ensemble fini, la probabilité d'un événement et la modélisation d'expériences de référence.

Ce travail sur les probabilités se poursuit en Terminale avec l'introduction de plusieurs outils de dénombrement : arbres, tableaux, diagrammes et les combinaisons (en série S).

Je choisis donc de situer ce dossier en Première S et ES et en Terminale S.

II Commentaires généraux.

II.1 A propos du sujet.

Pour pouvoir réaliser des calculs de probabilités, il est nécessaire de pouvoir dénombrer l'ensemble des issues favorables ou défavorables à la réalisation d'un événement.

L'objectif de ce dossier est donc d'utiliser différentes outils de dénombrement pour calculer certaines probabilités.

II.2 A propos des exercices.

J'ai donc choisi pour illustrer ce dossier, de vous présenter trois exercices qui diffèrent par les outils de dénombrement qu'ils utilisent :

- l'exercice n°1, de niveau Première S, utilise les arbres ;
- l'exercice n°2, de niveau Première ES, utilise un tableau ;
- l'exercice n°3, de niveau Terminale S, utilise les combinaisons.

Rappelons que l'emploi du dénombrement pour le calcul de probabilités n'est envisageable que dans des situations d'équiprobabilité, c'est-à-dire lorsque toutes les issues d'une expérience ont la même probabilité.
On peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 1

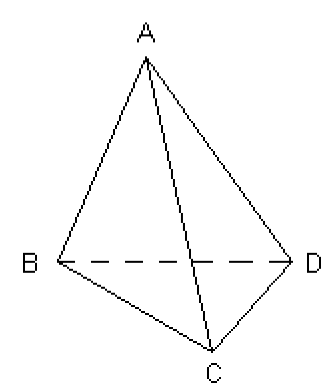
Lorsqu'il y a équiprobabilité sur un ensemble E fini alors pour tout événement A, on a :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de E}} = \frac{\text{card(A)}}{\text{card(E)}}$$

Notons que l'équiprobabilité est souvent signalée dans les énoncés de exercices : on parle de « dé parfait », de « pièce non truquée », etc.

III Présentation des exercices.

III.1 Exercice n°1.



<u>But</u> : Un scarabée se déplaçant sur les arêtes d'une tétraèdre régulier sous certaines conditions, calculer la probabilité de deux évènements relatifs à ce déplacement.

<u>Objectifs</u> :
- Repérer une situation d'équiprobabilité ;
- Montrer l'intérêt de bien choisir la modélisation (calculs de probabilités simplifiés).

<u>Outils :</u>
- Construction et étude d'arbres ;
- Théorème 1.

III.2 Exercice n°2.

<u>But :</u> Calculer des probabilités relatives à des modes et des montants de paiement (situation économique).

<u>Objectif :</u> Apprendre à utiliser de façon raisonnée un tableau pour le calcul de probabilités.

<u>Méthode :</u>
- Traduire les informations de l'énoncé dans un tableau puis le compléter ;
- Utiliser le tableau pour le calcul de probabilités.

<u>Outils :</u>
- Théorème 1 ;
- Pourcentages.

<u>Commentaires :</u>

On remarque dans la dernière question, que l'utilisation d'un tableau à double entrée peut permettre de calculer des probabilités conditionnelles, même si cette notion n'est pas introduite en Première.

III.3 Exercice n°3.

<u>But :</u> On considère un ensemble E à n éléments et on liste les éléments de P(E) sur des cartons qu'on place dans une urne. On tire deux cartons A et B et on souhaite calculer la probabilité que « $A \cup B = E$ ».

<u>Objectif :</u> Montrer l'intérêt, dans un exercice peu classique, de l'emploi des combinaisons.

<u>Outils :</u>

- Construction et étude d’arbres ;
- Définition des combinaisons ;
- Formule du binôme ;
- Langage ensembliste ;
- Principe de la somme ;
- Théorème 1.

IV Enoncés et références des exercices.

IV.1 Exercice n°1 (n°54 p 231, Transmath 1ère S 2001).

ABCD est un tétraèdre régulier. Un scarabée se déplace sur les arêtes de ce tétraèdre et uniquement sur les arêtes. Son déplacement obéit aux règles suivantes :

- le temps de parcours d'une arête est une minute ;
- à un sommet, il choisit au hasard une des trois arêtes ;
- le scarabée part du sommet A.

Calculer les probabilités des évènements suivants :

1) Le scarabée repasse en A au bout de trois minutes.
2) Le scarabée ne passe pas par le sommet C pendant les trois premières minutes.

IV.2 Exercice n°2 (n°24 p 89, Transmath 1ère ES 2001).

Un relevé de caisse de magasin a fourni les renseignements suivants concernant les modes de paiement et les montants des achats :

- 80% des achats sont payés par chèque ;
- 70% des achats sont d'un montant inférieur à 150€, dont 20% sont réglés en espèces ;
- 2% des clients utilisent une carte de paiement qui ne permet pas de régler des achats inférieurs à 150€.

1) Recopier et compléter le tableau suivant :

Montant → Mode de paiement↓	Inférieur à 150€	Supérieur strictement à 150€	Total
En espèces			
Par chèque			
Par carte			
Total			100

2) Une caissière enregistre un achat. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A : « C'est un achat strictement supérieur à 150€ »
B : « C'est un achat strictement supérieur à 150€ et payé en espèces »
C : « C'est un paiement en espèces ou un achat strictement supérieur à 150€ »
3) Un achat est payé en espèces. Quelle est la probabilité de l'événement D : « Cet achat est inférieur à 150€ » ?

IV.3 Exercice n°3 (n°85 p 329, Terracher TS 2002, modifié).

I) Montrer que le nombre de parties d'un ensemble E à n éléments est 2^n.

II) Soit E un ensemble à n éléments ($n \geq 1$). On dresse la liste de toutes les parties de E et chaque partie est recopiée sur un carton. On obtient 2^n cartons que l'on suppose indiscernables et que l'on place dans une urne. On tire alors, au hasard et sans remise, deux cartons de l'urne. On s'intéresse à la probabilité P que la réunion des deux parties obtenues sur les deux cartons soit égale à E.

1) Résoudre le problème à l'aide d'un arbre lorsque n= 1 puis n =2.
2) Combien y-a-t-il de tirages possibles dans le cas général ?
3) Soit A une partie de E à k éléments ($0 \leq k \leq n$). Démontrer que le nombre de parties B distinctes de A telles que $A \cup B = E$ est $2^n - 1$ si k = n (c'est à dire A = E) et 2^k sinon.

Indication : Lorsque $A \neq E$, trouver un moyen systématique de construire toutes les parties B telles que $A \cup B = E$ (on pourra utiliser le complémentaire $\overline{A}$ de A dans E).

4) En déduire que le nombre de tirages favorables est $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k + 2^n - 1$.
5) Conclure à l'aide de la formule du binôme que $P = \dfrac{3^n - 1}{2^n(2^n - 1)}$.

V Correction des exercices.

V.1 Exercice n°1.

On s'intéresse à trois déplacements successifs du scarabée partant de A. Une issue est donc un trajet du type :

A	3 choix	3 choix	3 choix

L'univers E est constitué de 27 issues équiprobables. Un arbre permet la représentation de E (je vous laisse le faire).

1. Notons R l'événement considéré. R correspond aux trajets : ABCA, ABDA, ACBA, ACDA, ADBA, ADCA (il suffit de choisir sur l'arbre tous les chemins ayant pour issue A) donc **p(R) =** $\frac{2}{9}$**.**

2. Notons S l'événement considéré. S correspond aux trajets : ABAB, ABAD, ABDB, ABDA, ADAD, ADAB, ADBA, ADBD donc **p(S) =** $\frac{8}{27}$**.**

V.2 Exercice n°2.

1. L'énoncé de l'exercice nous permet de remplir les cases bleues (attention lors de la lecture de l'énoncé : il s'agit de 20% de 70% donc, pour 100 achats, 14 achats ont un montant inférieur à 150€ et sont réglés en espèces).

Montant → Mode de paiement↓	Inférieur à 150€	Supérieur strictement à 150€	Total
En espèces	14		
Par chèque			80
Par carte	0	2	
Total	70	30	100

La lecture de la dernière information pose problème : si on la lit d'une seule traite, on pense ne pas pouvoir continuer à remplir le tableau. Mais une lecture attentive permet de comprendre que les cartes de paiement ne permettent pas de régler des montants inférieurs à 150€. On peut mettre en évidence devant le jury ce point lors de la résolution des exercices et proposer pour remédier au problème, de « scinder » la dernière information en deux nouvelles informations :

- 2% des achats sont réglés par carte bancaire ;
- on ne peut pas régler les achats d'un montant inférieur à 150€ à l'aide d'une carte bancaire.

On effectue ensuite la somme des lignes et des colonnes et on finit de compléter le tableau.

Montant → Mode de paiement↓	Inférieur à 150€	Supérieur strictement à 150€	Total
En espèces	14	4	18
Par chèque	56	24	80
Par carte	0	2	2
Total	70	30	100

2. Il suffit de lire le tableau et d'utiliser la notation en pourcentages :

p(A) = $\frac{30}{100}$ **=0,3.**

p(B) = $\frac{4}{100}$ **=0,04**

p(C) = $\frac{18}{100}+\frac{30}{100}-\frac{4}{100}$ **=0,34**

3. Les probabilités conditionnelles n'étant pas au programme de Première ES, on ne peut les utiliser. On se place alors dans l'univers formé par l'ensemble des paiements en espèces.

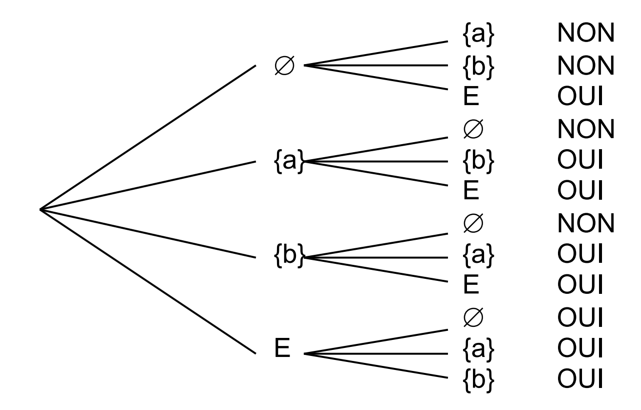
Par une rapide conversion, on obtient que parmi les paiements en espèces, environ 77% d'entre eux correspondent à un paiement inférieur à 150€.
On en déduit que **p(D) ≈ 0,77**.

V.3 Exercice n°3.

I) On pose E = $\{x_1, \ldots, x_n\}$.
On identifie chaque partie A de E à une n-liste, dont les éléments sont OUI ou NON selon le procédé :

- premier élément : OUI si $x_1 \in$ A, NON sinon ;
- deuxième élément : OUI si $x_2 \in$ A, NON sinon ;
- etc.

Le nombre de parties de E est donc le nombre de n-listes d'éléments de {OUI, NON}, c'est à dire $\mathbf{2^n}$.
II) 1) Si E = {a}, il n'y a que deux parties ∅ et E : les parties tirées sont donc, dans l'ordre, ∅ et A ou bien E et ∅. Dans les deux cas, leur réunion est E d'où **P = 1**.
Si E = {a,b}, il y a quatre parties : ∅, {a}, {b}, E. On en déduit l'arbre suivant :



D'où **P =** $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$**.**

2) **Le nombre de tirages possibles est**, d'après le principe du produit, $\mathbf{2^n(2^n-1)}$.

3) Si A =E, toute partie B de E vérifie A∪B=E. Le nombre de parties B de E distinctes de E vérifiant A ∪ B = E est donc 2^n-1.
Si A ≠ E, on a :

$$\begin{cases} B \neq A \\ A \cup B = E \end{cases} \Leftrightarrow A \cup B = E \Leftrightarrow B \supset \overline{A} \Leftrightarrow B = \overline{A} \cup X$$, où X est une partie quelconque de A.

Comme A possède k éléments, il y a 2^k parties de A. D'où le résultat :
Card{B ⊂ E / A∪ B = E} = 2^k.

4) On utilise le principe de la somme en triant les couples (A,B) selon le cardinal de A :

{(A, B) / A ∪ B = E} = $\bigcup_{k=0}^{n} \{(A,B) / A \cup B = E \text{ et } \mathrm{card}A = k\}$

Comme il y a $\binom{n}{k}$ parties A de E à k éléments et que, pour chacune de ces parties de A, il y a 2^k (si k < n) ou 2^n-1 (si k = n) parties B telles que A ∪ B=E, le nombre de tirages favorables est :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k + 2^n - 1$$

5) On a $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k + 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$ = $(2+1)^n$ = 3^n d'après la formule du binôme.

D'où P = $\frac{3^n - 1}{2^n(2^n - 1)}$ (on vérifie que ce résultat est toujours valide si n=1 et n=2).

VI Commentaires.

Le troisième exercice présente des difficultés. S'il est présenté correctement et sans erreur, il peut faire bonne impression mais il faudra préciser qu'il sera surtout destiné à de bons élèves de Terminale S.

Si vous ne vous sentez pas sûr, ne présentez pas cet exercice.